



TITLE:

与えられた\$Gauss\$写像をもつ球面
内の曲面 (部分多様体論とその周辺
領域における新しい研究対象と方
法)

AUTHOR(S):

田中, 亜矢子

CITATION:

田中, 亜矢子. 与えられた\$Gauss\$写像をもつ球面内の曲面 (部分多様体
論とその周辺領域における新しい研究対象と方法). 数理解析研究所講
究録 2004, 1403: 85-107

ISSUE DATE:

2004-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26072>

RIGHT:

与えられた *Gauss* 写像をもつ球面内の曲面

横浜市立大学 総合理学研究科 田中 亜矢子 (Ayako Tanaka)

Department of Mathematical Sciences,
Yokohama City University

1 はじめに

M を連結なリーマン面とし, Q_{n-1} を複素射影空間 CP^n における 2 次曲面とする. C^∞ 写像 $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ を与える. G を *Gauss* 写像にもつ曲面が n 次元球面 S^n 内に存在するための G の大域的な条件について 3 節, 4 節で考察し, 定理 1 – 4 の結果を得る. また, 5 節では曲面の *Gauss* 写像 G と平均曲率ベクトル場 $H: M \rightarrow R^{n+1}$ を用いて曲面が S^n 内に存在するための必要条件を求める. 逆に, 6 節ではこれらの条件を満たす C^∞ 写像 G と H を与えた場合, これらを *Gauss* 写像と平均曲率ベクトル場にもつ S^n 内の曲面が存在することを示す (定理 5). また, このような曲面 S を定義する写像 X は G と H を用いて具体的に表現できることを示す.

2 *Gauss* 写像の定義

連結なリーマン面 M , n 次元単位球面 S^n , C^∞ 共形はめこみ $X: M \rightarrow S^n$ の組 $S = (M, S^n, X)$ を S^n 内の曲面という.

$S = (M, S^n, X)$ を S^n 内の曲面とする. 点 $m_0 \in M$ をとる. m_0 のまわりの複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり, U を連結とする. C^∞ 写像 $A: M \rightarrow R^k$ に対し,

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial u_1} - \sqrt{-1} \frac{\partial A}{\partial u_2} \right), \\ A_{\bar{z}} &= \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial u_1} + \sqrt{-1} \frac{\partial A}{\partial u_2} \right) \end{aligned}$$

とおく. n 次元複素射影空間 CP^n の 2 次曲面 Q_{n-1} を

$$Q_{n-1} = \{[w] \in CP^n | w_1^2 + \cdots + w_{n+1}^2 = 0\}$$

と定義する. Q_{n-1} はグラスマン多様体

$$\tilde{G}(2, n+1) = SO(n+1)/SO(2) \times SO(n-1)$$

と微分同相である.

各 $u \in U$ に対し, $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} 内の平行移動により, 接ベクトル

$$dX_u \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)_u \right), \quad dX_u \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)_u \right)$$

と $X_{u_1}(u)$, $X_{u_2}(u)$ をそれぞれ同一視すると, $X(M)$ の各接平面を R^{n+1} において原点に平行移動した向き付けられた 2 次元平面に対応する Q_{n-1} の元が一意に定まる. 曲面 S の *Gauss* 写像を

$$G: M \longrightarrow Q_{n-1} \quad \left(u \longmapsto \left[\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}(u) \right] \right)$$

と定義する.

各 $u \in M$ に対し, $G(u)$ に対応する R^{n+1} の原点を通る向き付けられた 2 次元平面を $\hat{G}(u)$ とし,

$$P(M, G) = \bigcup_{u \in M} \hat{G}(u)$$

とおく. $P(M, G)$ を含む R^{n+1} 内の最小次元の線形部分空間を V とし, その次元を k とすると $2 \leq k \leq n+1$ となる. R^{n+1} における V の直交補空間を V^\perp とおく. R^{n+1} 内の全ての m 次元標構からなる *Stiefel* 多様体を $St(n+1, m)$ であらわす. $(n+1)$ 次元複素空間 C^{n+1} の標準的なエルミート内積を \langle, \rangle であらわす. I_k を k 次単位行列とする.

3 S^n 内の曲面とGauss写像の関係

曲面 $S = (M, S^n, X)$ ($n \geq 3$) を与える. 点 $m_0 \in M$ のまわりの複素座標近傍系を (U, z) とする. 曲面 S の Gauss 写像を $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ とすると,

$$E_i: U \rightarrow R^{n+1} \setminus \{0\} \quad (i = 1, 2)$$

を次が成り立つようにとれる.

1. U 上で $G(z) = [(E_1 + \sqrt{-1}E_2)(z)]$ である.
2. $E^T(u) := (E_1(u), E_2(u))$ が $\hat{G}(u)$ の正規直交標構である.
3. $E^T(u)$ は $\hat{G}(u)$ に向き付けを与える.

各 $u \in U$ に対し, $E(u) := (E^T(u), E^N(u)) = (E_1(u), E_2(u), E_3(u), \dots, E_{n+1}(u))$ が R^{n+1} 内における正の向きの正規直交標構となるようにとる. C^∞ 写像

$${}^t\Psi: U \rightarrow C^2 \setminus \{0\} \quad \left(z \mapsto (\psi_1(z), -\sqrt{-1}\psi_1(z)) \right)$$

を用いて

$$X_z = E^T \Psi$$

と表せる. このとき, $\langle X_z, X \rangle = 0$ が成り立ち, C^∞ 写像 $A: U \rightarrow R^{n-1}$ を用いて

$$X = E^N A$$

と表せる. このとき,

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial E^N}{\partial z} A + E^N \frac{\partial A}{\partial z} = E^T \Psi$$

より, ${}^t E^N E^T = 0$ と ${}^t E^N E^N = I_{n-1}$ を用いて

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -{}^t E^N \frac{\partial E^N}{\partial z} A \quad (1)$$

を得る.

U 上で

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial {}^t E^N}{\partial \bar{z}} \frac{\partial E^N}{\partial z} + {}^t E^N \frac{\partial E^N}{\partial z} \frac{\partial {}^t E^N}{\partial \bar{z}} E^N \right\} = 0$$

が成り立つと仮定する. このとき, U を単連結とし十分小さくとり, $m_0 \in U$ において初期値 $A(m_0) = \xi \neq 0$ を与えれば, 偏微分方程式 (1) の解 $A: U \rightarrow R^{n-1}(C^\infty)$ は一意に存在する.

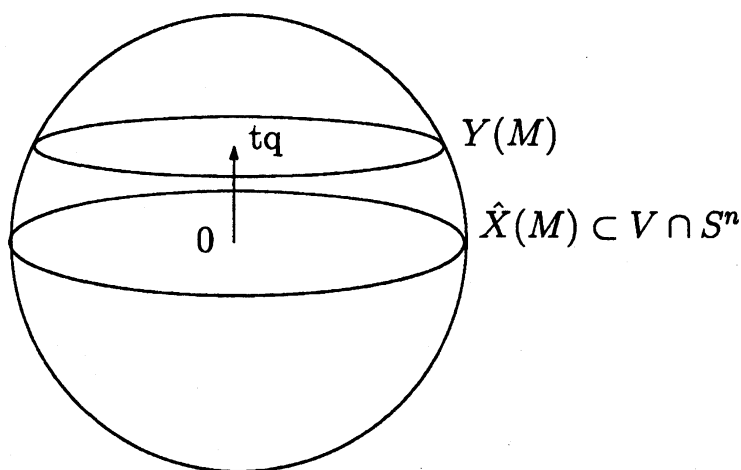
補題 1. ([4]) M を連結なリーマン面とし, 曲面 $S = (M, S^n, X)$ の Gauss 写像を $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ とする. $3 \leq k \leq n$ ならば, 以下が成り立つ.

- (1) G を Gauss 写像にもち, $\hat{X}(M) \subset V \cap S^n$ を満たす S^n 内の曲面 $\hat{S} = (M, S^n, \hat{X})$ が存在する.
- (2) 曲面 $S_Y = (M, S^n, Y)$ の Gauss 写像が G であるならば, Y は $Y = c\hat{X} + tq$ とあらわせる. ここに, c と t は

$$c = \pm \sqrt{1 - t^2}, \quad |t| < 1$$

を満たす定数で, $q \in V^\perp \cap S^n$ である.

S^n



補題 2. ([4]) M, G と $S = (M, S^n, X)$ を補題 1 の通りとする. 曲面 $S_Y = (M, S^n, Y)$ の Gauss 写像が G であるとする. このとき, $k = n + 1$ ならば, $Y = \pm X$ である.

4 与えられた写像を *Gauss* 写像にもつ S^n 内の曲面

M を連結なリーマン面とし, C^∞ 写像 $G : M \rightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える. 点 $m_0 \in M$ をとる. m_0 のまわりの複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり, U は連結とする. U を十分小さくとれば, C^∞ 写像

$$E_i : U \rightarrow R^{n+1} \setminus \{0\} \quad (i = 1, 2)$$

を各 $u \in U$ に対し次を満たすようにとれる.

1. $E^T(u) := (E_1(u), E_2(u))$ が $\hat{G}(u)$ の正規直交標構である.
2. $E^T(u)$ は $\hat{G}(u)$ に向き付けを与える.

$E(u) := (E^T(u), E^N(u)) = (E_1(u), E_2(u), E_3(u), \dots, E_{n+1}(u))$ を R^{n+1} 内における正の向きの正規直交標構となるようにとる.

M が *Gauss* 平面 C のとき次の定理を得る. $z = u_1 + \sqrt{-1}u_2$ を C 上の標準的な座標関数とする.

定理 1. ([4]) C^∞ 写像 $G : C \rightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える. $k \geq 3$ とする. さらに C 上の任意の点 z_0 に対し, z_0 の連結な開近傍 U_0 が存在し, C^∞ 写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \rightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \dots, E_{n+1}) : U_0 \rightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \rightarrow SO(n+1)$ が以下の条件を満たすと仮定する:

- (i) 各点 $u \in U_0$ において $E^T(u)$ は $\hat{G}(u)$ の向き付けを与える正規直交標構である.
- (ii) U_0 上で

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial {}^t E^N}{\partial \bar{z}} \frac{\partial E^N}{\partial z} + {}^t E^N \frac{\partial E^N}{\partial z} \frac{\partial {}^t E^N}{\partial \bar{z}} E^N \right\} = 0$$

が成り立つ.

(iii) U_0 上で

$$(I_{n+1} - E^{Nt} E^N) \frac{\partial E^N}{\partial u_j} \neq 0 \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ. U_0 上で,

$$B := \frac{\partial^t E^N}{\partial z} \left(I_{n+1} - E^{Nt} E^N \right) \frac{\partial E^N}{\partial z}$$

とおくとき, z_0 において ${}^t \xi B(z_0) \xi = 0$ となる $\xi \in R^{n-1} \setminus \{0\}$ が存在する.

(iv) U_0 上で

$$\frac{\partial^t E^N}{\partial z} E^N B + B^t E^N \frac{\partial E^N}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

が成り立つ.

このとき, G を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (C, S^n, X)$ が存在する.

条件 (i)-(iv) は正規直交標構 $E = (E^T, E^N)$ の取り方に依らない. また, 条件 (i)-(iv) を満たす具体的な G が存在する.

G を Gauss 写像にもつ S^n 内の曲面の局所的な存在を次の補題で示す.

補題 3. M を連結なリーマン面とし, C^∞ 写像 $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える. $k \geq 3$ とする. 点 $m_0 \in M$ をとる. m_0 のまわりの複素座標近傍系 (U_0, z) をとり, U_0 は連結とする. U_0 上で C^∞ 写像 $E = (E^T, E^N): U_0 \rightarrow SO(n+1)$ が定理 1 の条件 (i)-(iv) を満たすとする. このとき, m_0 の単連結な開近傍 U が存在し, $G|_U$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (U, S^n, X)$ が存在する.

(証明) m_0 のまわりの複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり, $U (\subset U_0)$ は単連結とする. 仮定 (ii) と (iii) から, U を十分小さくとれば, 点 $m_0 \in U$ において

$${}^t A(m_0) B(m_0) A(m_0) = 0$$

を満たす $A(m_0) = \xi \neq 0$ を初期値とする微分方程式 (1) の解 $A : U \rightarrow R^{n-1} (C^\infty)$ が一意に求まる. A を用いて C^∞ 写像 $Y : U \rightarrow R^{n-1}$ を $Y = E^N A$ と定義する. このとき,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = (I_{n+1} - E^N {}^t E^N) \frac{\partial E^N}{\partial z} A$$

となり,

$$\left\langle \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} \right\rangle = {}^t A \frac{\partial {}^t E^N}{\partial z} (I_{n+1} - E^N {}^t E^N) \frac{\partial E^N}{\partial z} A = {}^t A B A$$

を得る. これは仮定 (iv) より一定なので, A の初期値の与え方から恒等的に 0 である. よって C^∞ 写像 Y は共形はめこみである. また, ${}^t E^N E^N = I_{n-1}$ を用いると

$${}^t E^N \frac{\partial Y}{\partial z} = {}^t E^N (I_{n+1} - E^N {}^t E^N) \frac{\partial E^N}{\partial z} A = 0$$

となり, Y の Gauss 写像は $G|_U$ である. さらに

$$\begin{aligned} \left\langle Y, \frac{\partial Y}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle E^N A, (I_{n+1} - E^N {}^t E^N) \frac{\partial E^N}{\partial z} A \right\rangle \\ &= {}^t A \frac{\partial {}^t E^N}{\partial z} (I_{n+1} - E^N {}^t E^N) E^N A \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る. このことから U が連結なので Y の長さは U 上で一定である. C^∞ 共形はめこみ $X : U \rightarrow S^n$ を

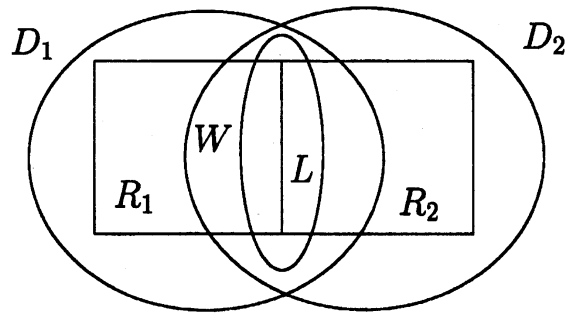
$$X = \frac{1}{|Y|} Y$$

と定義すれば曲面 $S = (U, S^n, X)$ の Gauss 写像は $G|_U$ である.

与えられた写像を Gauss 写像にもつ S^n 内における曲面の大域的な存在を示す.

R_1, R_2 を C 上の閉長方形, D_1, D_2 を C 上の連結な開集合とし, これらは次を満たすとする.

- (1) $R = R_1 \cup R_2$ が閉長方形である.
- (2) $L = R_1 \cap R_2$ が閉線分である.
- (3) $R_j \subset D_j \quad (j = 1, 2)$
- (4) $L \subset D_1 \cap D_2$
- (5) W は L を含む $D_1 \cap D_2$ の連結成分である.
- (6) $G|_{D_j} \quad (j = 1, 2)$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_j = (D_j, S^n, \Psi_j)$ が存在する.



この条件下で次の補題を得る.

補題 4. $k = n + 1$ のとき, $G|_R$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_R = (R, S^n, \Psi_R)$ が存在する.

(証明) $k = n + 1$ のとき, 補題 2 から W 上で $\Psi_1 = \pm \Psi_2$ を得る.
 C^∞ 写像 $\Psi_R: R \rightarrow S^n$ は以下で定義できる.

- (1) $\Psi_1 = \Psi_2$ のとき $\Psi_R|_{D_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$.
- (2) $\Psi_1 = -\Psi_2$ のとき $\Psi_R|_{D_1} = \Psi_1, \quad \Psi_R|_{D_2} = -\Psi_2$.

この Ψ_R で定義される曲面 $S_R = (R, S^n, \Psi_R)$ の Gauss 写像は $G|_R$ である.

補題 4 において S_R は R を含む連結な開集合で定義されている.

補題 5. K を C 上の閉長方形とする. 定理 1 の仮定の下, $k = n + 1$ のとき, $G|_K$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_K = (K, S^n, \Psi_K)$ が存在する.

(証明) K を以下のように $p \times q$ 個の閉長方形 K_{ij} ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$) に分割する.

- (1) $K_{ij} \cup K_{ij+1}$ と $K_{ij} \cup K_{i+1j}$ が閉長方形である.
- (2) $K_{ij} \cap K_{ij+1}$ と $K_{ij} \cap K_{i+1j}$ が閉線分である.
- (3) $K_j := \bigcup_{i=1}^p K_{ij}$ が閉長方形である.
- (4) $K_j \cup K_{j+1}$ が閉長方形で, $K_j \cap K_{j+1}$ が閉線分である.
- (5) $K = \bigcup K_{ij}$ である.

K_{j+1}	K_{ij+1}		
K_j	K_{ij}	K_{i+1j}	

K_{ij} を十分小さくとれば, 補題 3 より単連結な開集合 $D_{ij} \supset K_{ij}$ が存在し, $G|_{D_{ij}}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_{ij} = (D_{ij}, S^n, \Psi_{ij})$ が存在する. よって補題 4 より K の分割の仕方から $G|_{K_{11} \cup K_{21}}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_{K_{11} \cup K_{21}} = (K_{11} \cup K_{21}, S^n, \Psi_{K_{11} \cup K_{21}})$ が存在することがわかる. 同様の議論が閉長方形 $K_{11} \cup K_{21}$ と K_{31} に対しても成り立ち, これを繰り返すと $G|_{K_1}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_1 = (K_1, S^n, \Psi_{K_1})$ が存在することが導かれる. 同様のことが K_j で成り立つ. $K_1 \cup K_2$ が閉長方形で, $K_1 \cap K_2$ が閉線分なので, 補題 4 より $G|_{K_1 \cup K_2}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $\hat{S} = (K_1 \cup K_2, S^n, \Psi_{K_1 \cup K_2})$ が存在することが分かる. 同様の議論を繰り返すことにより $G|_K$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_K = (K, S^n, \Psi_K)$ が存在することが分かる.

補題 5 より次を得る.

補題 6. 定理 1 の仮定の下, $k = n + 1$ のとき, G を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (C, S^n, X)$ が存在する.

(証明) C 上の閉長方形 K_j で構成される列 $\{K_j\}$ を次を満たすようにとる;

$$C = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad K_j \subset \text{Int} K_{j+1} \subset K_{j+1}.$$

各 K_j において $G|_{K_j}$ を Gauss 写像とする曲面 $S_{K_j} = (K_j, S^n, X_j)$ が存在する. K_1 上では $X_1 = \pm X_2$ なので C^∞ 共形はめこみ $\hat{X}_2: K_1 \rightarrow S^n$ を次のように定義する.

- (1) K_1 上で $X_1 = X_2$ のとき $\hat{X}_2|_{K_j} = X_j \quad (j = 1, 2).$
- (2) K_1 上で $X_1 = -X_2$ のとき $\hat{X}_2|_{K_1} = X_1, \hat{X}_2|_{K_2 \setminus K_1} = -X_2.$

この \hat{X}_2 で定義される曲面 $\hat{S}_2 = (K_2, S^n, \hat{X}_2)$ の Gauss 写像は $G|_{K_2}$ である.

帰納法より, 各 j に対し $G|_{K_j}$ を Gauss 写像とする曲面 $\hat{S}_j = (K_j, S^n, \hat{X}_j)$ が存在し,

$$\hat{X}_{j+1}|_{K_j} = \hat{X}_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

を満たすことが分かる. よって曲面 $S = (C, S^n, X)$ を

$$X|_{K_j} = \hat{X}_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

で定義できる. S の Gauss 写像は G である.

補題 7. 定理 1 の仮定の下, $3 \leq k \leq n$ のとき, G を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (C, V \cap S^n, X)$ が存在する.

(証明) 点 $z_0 \in C$ をとる. 補題 3 より, z_0 の単連結な開近傍 U を十分小さくとれば, $G|_U$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S_0 = (U, S^n, \Psi_0)$ が存在する. $3 \leq k \leq n$ より, 補題 1 (1) から $\Psi_1(U) \subset V \cap S^n$ を満たす C^∞ 共形はめこみ Ψ_1 が存在し, $G|_U$ を Gauss 写像にもち, Ψ_1 で定義される曲面 $S_1 = (U, S^n, \Psi_1)$ が存在する. $\dim V = k$ より, $k = n+1$ の場合と同様の議論を $(k-1)$ 次元単位球面 $V \cap S^n$ ですれば, $V \cap S^n$ 内に G を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (C, V \cap S^n, X)$ が存在することが分かる.

以上の補題から定理 1 が示される. 定理 1 から次の系を得る.

系 8. G を定理 1 の通りとする. G が定理 1 の仮定を満たし, $B = 0$ のとき, G を *Gauss* 写像に持つ S^n 内の曲面が存在し, $3 \leq k \leq n$ である.

リーマン球面 S^2 に対し, 次の定理が成り立つ.

定理 2. 定理 1 で C を S^2 とし, G について定理 1 と同じ仮定をする. このとき G を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (S^2, S^n, X)$ が存在する.

(証明) $S^2 = U_1 \cup U_2$ となり, $U_1 \cap U_2$ が連結である C と微分同相な S^2 の開集合 U_j ($j = 1, 2$) をとる. 定理 1 より $G|_{U_j}$ ($j = 1, 2$) を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S_j = (U_j, S^n, \Psi_j)$ が存在する.

$k = n + 1$ のとき, $U_1 \cap U_2$ が連結なので補題 2 より $U_1 \cap U_2$ 上で

$$\Psi_1 = \pm \Psi_2$$

である. $\Psi_1 = \Psi_2$ の場合は C^∞ 共形はめこみ $X : S^2 \rightarrow S^n$ を

$$X|_{U_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$$

と定義でき, $\Psi_1 = -\Psi_2$ の場合は

$$X|_{U_1} = \Psi_1, \quad X|_{U_2} = -\Psi_2$$

と定義できる. 以上より, $k = n + 1$ のとき G を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (S^2, S^n, X)$ の存在が示された.

$3 \leq k \leq n$ のとき, 同様の論法を $(k - 1)$ 次元単位球面 $V \cap S^n$ に対して用いて G を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (S^2, S^n, X)$ の存在が示すことができる.

複素トーラス T^2 に対し, 以下の定理を得る.

定理 3. C^∞ 写像 $G : T^2 \rightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える. $k \geq 3$ とする. さらに C 上の任意の点 z_0 に対し, z_0 の複素座標近傍 (U, z) が存

在し, C^∞ 写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \longrightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \dots, E_{n+1}) : U_0 \longrightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$ が定理 1 おける条件 (i)-(iv) を満たすと仮定する. このとき, T^2 上の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $S = (\hat{T}^2, S^n, X)$ が存在する.

全ての自然数の集合を N , 全ての整数の集合を Z とする. Γ を平行移動

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= z + a_1, \quad \varphi_2(z) = z + a_2 \\ (z \in C, a_1, a_2 \in C \setminus \{0\}, a_1 \neq sa_2, s \in R \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

により生成される $T^2 = C/\Gamma$ を満たす C 上の被覆変換群とする. $k_1, k_2 \in N$ に対し, $\Gamma(k_1a_1, k_2a_2)$ を $\varphi_1^{k_1}$ と $\varphi_2^{k_2}$ で生成される $\Gamma(a_1, a_2)$ の部分群とする. $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ である. 複素トーラス $C/\Gamma(k_1a_1, k_2a_2)$ を $T^2(k_1a_1, k_2a_2)$ と表す. $z \in C$ に対し,

$$z = (t_1 + l_1)k_1a_1 + (t_2 + l_2)k_2a_2, \quad 0 \leq t_1, t_2 < 1$$

を満たす $l_1, l_2 \in Z$ が存在する. 射影 $\pi_{k_1k_2} : C \longrightarrow T^2(k_1a_1, k_2a_2)$ を

$$\pi_{k_1k_2}(z) = \pi_{k_1k_2}((t_1 + l_1)k_1a_1 + (t_2 + l_2)k_2a_2) = t_1k_1a_1 + t_2k_2a_2$$

で定義する. $[z] = \pi_{k_1k_2}(z)$ ($z \in C$) とおく.

$k_1, k_2 \in N$ に対し, C^∞ 写像 $\tilde{\pi}_{k_1k_2} : T^2(k_1a_1, k_2a_2) \longrightarrow T^2(a_1, a_2)$ と $G_{k_1k_2} : T^2(k_1a_1, k_2a_2) \longrightarrow Q_{n-1}$ を

$$\tilde{\pi}_{k_1k_2}([z]) = \pi_{11}(z) \quad (z \in C), \quad G_{k_1k_2} = G \circ \tilde{\pi}_{k_1k_2}$$

でそれぞれ定義する. Γ 不変な C^∞ 写像

$$\tilde{G} : C \longrightarrow Q_{n-1} \quad (z \longmapsto G \circ \pi_{11}(z))$$

を得る. G の仮定から \tilde{G} は定理 1 の仮定を満たすので \tilde{G} を *Gauss* 写像にもつ曲面 $\tilde{S}_1 = (C, S^n, \tilde{X}_1)$ を得る. C^∞ 共形はめこみ $\tilde{X}_j : C \rightarrow S^n$ ($j = 2, 3$) を $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1$, $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$ で定義し, $\tilde{S}_j = (C, S^n, \tilde{X}_j)$ を \tilde{G} を *Gauss* 写像にもつ曲面とする.

$k = n + 1$ とする. $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3$ は同じ *Gauss* 写像 \tilde{G} を持つので、補題 2 より

$$\tilde{X}_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$$

となる. 次の 4 つの場合が生じる :

- (1) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$, (2) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$,
 (3) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_2$, (4) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_2$.

Case (1): $\varphi \in \Gamma$ に対し, $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi$ となる. C^∞ 共形はめこみ $X : T^2 \rightarrow S^n$ を

$$X([z]) = \tilde{X}_1(z) \quad (z \in C)$$

で定義する. よって, G を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (T^2, S^n, X)$ を得る.

Case (2): C^∞ 共形はめこみ $\tilde{X}_4 : C \rightarrow S^n$ を $\tilde{X}_4 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1^2$ で定義する. 曲面 S_1 と $\tilde{S}_4 = (C, S^n, \tilde{X}_4)$ は同じ *Gauss* 写像をもつので、補題 2 より $\tilde{X}_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ \varphi_1^2$ となる. よって、次の 2 つの場合がある :
 (i) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1^2$, (ii) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1^2$.

Case (i): C^∞ 共形はめこみ $X_{21} : T^2(2a_1, a_2) \rightarrow S^n$ を

$$X_{21}([z]) = \tilde{X}_1(z) \quad (z \in C)$$

で定義すると、曲面 $S_{21} = (T^2(2a_1, a_2), S^n, X_{21})$ が存在し、*Gauss* 写像は G_{21} である.

Case (ii): $-\tilde{X}_1 \circ \varphi_1^2 = \tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1$ より,

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$$

となる. これは (1) の場合と同じである.

以上より, (2) が成り立つとき, T^2 の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を Gauss 写像とする曲面 $S = (\hat{T}^2, S^n, X)$ が存在する. ただし, \hat{T}^2 は複素トーラス T^2 または $T^2(2a_1, a_2)$ である.

Case (3): 上と同様の議論を用いると, \hat{T}^2 は T^2 または $T^2(a_1, 2a_2)$ で Case (2) と同様の結果を得る.

Case (4): \hat{T}^2 は $T^2, T^2(2a_1, a_2), T^2(a_1, 2a_2), T^2(2a_1, 2a_2)$ のいずれかで Case(2) と同様の結果を得る.

$3 \leq k \leq n$ のとき, 補題 7 と同様の論法を用いることにより T^2 上の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を Gauss 写像とする曲面 $S = (\hat{T}^2, V \cap S^n, X)$ が存在することが示せる.

RP^n を n 次元実射影空間とする.

定理 4. M をリーマン面とし, C^∞ 写像 $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える. $k \geq 3$ とする. さらに C 上の任意の点 z_0 に対し, z_0 の複素座標近傍 (U, z) が存在し, C^∞ 写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2): U_0 \rightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \dots, E_{n+1}): U_0 \rightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N): U_0 \rightarrow SO(n+1)$ が定理 1 おける条件 (i)-(iv) を満たすと仮定する. このとき, 曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が存在し, S の各点の近傍が G を Gauss 写像にもつ S^n 内の曲面によりおおわれる.

(証明) $\pi: S^n \rightarrow RP^n$ を自然な射影とする. 補題 3 より, 各 $m_0 \in M$ に対し, m_0 のまわりの単連結な開近傍 U_0 が存在し, $G|_{U_0}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $\hat{S}_0 = (U_0, S^n, \hat{\Psi}_0)$ が存在する. $\Psi_0 = \pi \circ \hat{\Psi}_0$ とし, 曲面 $S_0 = (U_0, RP^n, \Psi_0)$ を定義すると, S_0 は定理 4 の結果の性質を満たす.

$\hat{S}_1 = (U_1, S^n, \hat{\Psi}_1)$ と $\hat{S}_2 = (U_2, S^n, \hat{\Psi}_2)$ を上記の性質を満たす曲面とする. $\Psi_1 = \pi \circ \hat{\Psi}_1, \Psi_2 = \pi \circ \hat{\Psi}_2$ とし, 曲面 $S_1 = (U_1, RP^n, \Psi_1), S_2 = (U_2, RP^n, \Psi_2)$ を得る. $W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ とすると, 定理の結果の性

質を満たす

$$\Psi_3|_{U_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$$

で定義される曲面 $S_3 = (U_3, RP^n, \Psi_3)$ ($U_3 = U_1 \cup U_2$) が存在することを示す.

$U_3 = U_1 \cup U_2$, $W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ とする. 補題 2 より W の連結成分 W_0 上で

$$\hat{\Psi}_1|_{W_0} = \pm \hat{\Psi}_2|_{W_0}$$

が成り立つ. よって C^∞ 共形はめこみ $\Psi_3: U_3 \rightarrow RP^n$ を

$$\Psi_3|_{U_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$$

で定義でき, S_3 は定理の結果の性質を満たす曲面である.

M はコンパクトとする. 補題 3 より M 上の各点のまわりの単連結な開近傍 U が存在し, 定理の結果の性質を満たす曲面 $S_U = (U, RP^n, \Psi)$ が存在する. M はコンパクトなので, この様な有限個の単連結開近傍 U_1, \dots, U_s で M を覆うことができる. 前述の論法を用いると, 定理の結果の性質を満たす曲面 $S = (M, RP^n, X)$ を得る.

M がコンパクトでないとき, \bar{K}_j がコンパクトで

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad \bar{K}_j \subset K_{j+1}$$

を満たす連結な M の開集合の列 $\{K_j\}$ を選ぶことができる. 各 j に対し, 定理の結果の性質を満たし,

$$\Psi_{j+1}|_{K_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

となる曲面 $S_j = (\bar{K}_j, RP^n, \Psi_j)$ が存在する. よって

$$X|_{K_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

で定義される曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が得られ, これは定理の結果の性質を満たす.

$3 \leq k \leq n$ のとき, 補題 7 と同じ論法を用いて $(k-1)$ 次元単位球面 $V \cap S^n$ に対し上述の議論をすれば, 曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が存在し, S の各点の近傍が G を Gauss 写像にもつ $V \cap S^n$ 内の曲面によりおおわれることが示される.

5 S^n 内の曲面の Gauss 写像と平均曲率ベクトル場

S^n 内の曲面の Gauss 写像と平均曲率場の間で成り立つ関係について示す. $\Psi \in C^m$ のノルム $|\Psi|$ を $|\Psi|^2 = \langle \Psi, \Psi \rangle$ で定義する. 曲面 $S = (M, S^n, X)$ が与えられたとき, C^∞ 写像 $X: M \rightarrow S^n$ が共形はめこみなので, M の複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ (U は連結) をとれば, U 上で

$$\left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \lambda^2, \quad \lambda > 0$$

が成り立つ. \tilde{H} を曲面 S の R^{n+1} での平均曲率ベクトル場とすると,

$$\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial \bar{z}} = 2\tilde{H}$$

が成り立つ. U を十分小さくとれば, $X_z = \psi\Phi$ を満たす C^∞ 写像

$$\Phi: U \rightarrow C^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \psi: U \rightarrow C \setminus \{0\}$$

が存在する. Gauss 写像の定義より $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1})$ は U 上で

$$\sum_{k=1}^{n+1} (\varphi_k)^2 = 0$$

を満たす.

$$\eta = \frac{\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle}{|\Phi|^2}, \quad V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi \quad (2)$$

とおく. ここで

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} \tilde{H} = V, \quad (\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta \quad (3)$$

が成り立つ. S が S^n 内の曲面であることから, U 上の任意の z に対し $V(z) \neq 0$ なので, ある C^∞ 関数 $\theta: U \rightarrow R$ が存在し,

$$V(z) = e^{i\theta(z)} R(z), \quad V(z) \neq 0, \quad R(z) \in R^{n+1} \quad (z \in U), \quad (4)$$

$$\theta_{z\bar{z}} = \text{Im}\{\eta_z\} \quad (5)$$

を満たす.

H_0 を曲面 S の S^n での平均曲率ベクトル場とする. R^{n+1} における平行移動により $H_0(z) = (X(z), H(z))$ ($z \in M$) を満たす C^∞ 写像 $H: M \rightarrow R^{n+1}$ と H_0 を同一視する. よって

$$H = \tilde{H} + X, \quad \langle H, \Phi \rangle = 0 \quad (6)$$

を得る. このことと (3) より

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V \quad (7)$$

が成り立つ. $|X| = 1$ と $\langle H, X \rangle = 0$ より

$$|\psi| = \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}} \quad (8)$$

を得る. よって

$$\psi = \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}} e^{-i\alpha}$$

と表せる. 以上のことより G と H の間には次の関係が成り立つ.

$$\langle H, \Phi_{\bar{z}} \rangle = \frac{|V||H|^2 e^{-i\alpha}}{\sqrt{1 + |H|^2}}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} i\alpha_z &= 2(\log |\Phi|)_z + \frac{1}{2} \left(\log(1 + |H|^2) \right)_z \\ &\quad - (\log |V|)_z - \bar{\eta}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} H_z &= \frac{\sqrt{1 + |H|^2}}{|V|} (V_z - 2(\log |\Phi|)_z V + \bar{\eta} V) \\ &\quad + \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}} \Phi. \end{aligned} \quad (11)$$

6 曲面の存在定理

M を連結なリーマン面とし,

$$G: M \rightarrow Q_{n-1} \ (n \geq 3), \quad H: M \rightarrow R^{n+1}$$

を C^∞ 写像とする. G は M 上の複素座標近傍系 (U, z) で C^∞ 写像 $\Phi: U \rightarrow C^{n+1} \setminus \{0\}$ を用いて

$$G(p) = [\bar{\Phi}(p)], \quad p \in U$$

と表せる. C^∞ 写像 $\eta: U \rightarrow C$ と $V: U \rightarrow C^{n+1}$ を

$$\eta = \frac{\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle}{|\Phi|^2}, \quad V = \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi$$

で定義する. 以下の条件について考察する.

$$V = e^{i\theta} R, \quad V(z) \neq 0, \quad R(z) \in R^{n+1} \quad (z \in U), \quad (12)$$

$$\theta_{z\bar{z}} = \text{Im}\{\eta_z\}, \quad (13)$$

$$\langle H, \Phi \rangle = 0, \quad (14)$$

$$\langle H, \Phi_{\bar{z}} \rangle = \frac{|V||H|^2 e^{-i\theta}}{\sqrt{1+|H|^2}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} i\theta_z &= 2(\log |\Phi|)_z + \frac{1}{2} \left(\log(1+|H|^2) \right)_z \\ &\quad - (\log |V|)_z - \bar{\eta}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} H_z &= \frac{\sqrt{1+|H|^2}}{|V|} \left(V_z - 2(\log |\Phi|)_z V + \bar{\eta} V \right) \\ &\quad + \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1+|H|^2}} \Phi. \end{aligned} \quad (17)$$

これらの条件は5節の(4),(5),(6),(9),(10),(11)に対応している. 異なる M 上の複素座標近傍系 (\hat{U}, w) をとる. $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ ならば U 上で(12)-(17)の条件が成り立つとき, $U \cap \hat{U}$ 上で \hat{U} 上で定義される $\hat{\Phi}, \hat{\eta}, \hat{V}, \hat{\theta}$ に対し同様の条件が成り立つ. U と \hat{U} が連結で G と H が実解析的とする. このとき条件(12)-(17)が U 上で成り立ち, $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ ならば,

同様のことが \hat{U} 上でも成り立つ. よって, M が連結なので, M 上のすべての複素座標近傍で同様のことが成り立つ.

曲面 $S = (M, S^n, X)$ の Gauss 写像 G と平均曲率ベクトル場 H はどのような複素座標近傍でも条件 (12)-(17) を満たしている. 逆に, M 上のすべての点の複素座標近傍上で条件 (12)-(17) を満たす C^∞ 写像 $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ と $H: M \rightarrow R^{n+1}$ を与えると, Gauss 写像は G であり, 平均曲率ベクトル場は H となる曲面 $S = (M, S^n, X)$ が存在する. このことは以下の補題により証明される.

補題 9. (U, z) を U が連結な M 上の複素座標近傍系とする. U 上で G と H が条件 (12)-(17) を満たしているとする. C^∞ 写像 $\psi: U \rightarrow C \setminus \{0\}$ が U 上で

$$\psi = \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}} e^{-i\alpha}, \quad \alpha \equiv \theta \pmod{2\pi} \quad (18)$$

とすると偏微分方程式 $X_z = \psi\Phi$ の解 X は U 上で

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V, \quad |X| = 1$$

となる.

(証明) $\psi = \rho e^{-i\alpha}$ ($\rho > 0$) とおく. ψ は (3) を満たすので

$$(\log \rho)_z + i\alpha_z = -\bar{\eta}$$

である. 微分方程式 $X_z = \psi\Phi$ の積分可能条件は $\text{Im}\{\psi\Phi\}_z = 0$ で, これは

$$\theta - \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$$

と同値である. よって, $\alpha_z = \theta_z$ を得る. これと (6) より

$$(\log \rho)_z = \left(\log \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}} \right)_z$$

を得る. 仮定より

$$\rho = \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1 + |H|^2}}$$

である。(6)と(7)より

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial z} &= \psi \Phi \\ &= \frac{|V|}{|\Phi|^2 \sqrt{1+|H|^2}} e^{-i\alpha} \Phi \\ &= \epsilon H_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{1+|H|^2} e^{-i\alpha}}{|V|} V \right) \quad (\epsilon \pm 1)\end{aligned}$$

となるので, U 上で

$$X = \left(\epsilon H - \frac{\sqrt{1+|H|^2} e^{-i\alpha}}{|V|} V \right) + A_0 = \left(\epsilon H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V \right) + A_0$$

と表せる. ただし, $A_0 \in R^{n+1}$ である. U 上で $\epsilon = 1$, $A_0 = 0$ となる点を初期値に与えれば

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V$$

である. ここに,

$$\psi = \frac{|V| e^{-i\alpha}}{|\Phi|^2 \sqrt{1+|H|^2}}, \quad \alpha \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

とする. また,

$$\langle H, V \rangle = \langle H, \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi \rangle = \langle H, \Phi_{\bar{z}} \rangle$$

と $\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi}$ を用いると $|X| = 1$ が導かれる.

補題 9 で得た X は M 上で大域的であることは容易に分かる.

補題 10. $S_1 = (M, S^n, X)$ と $S_2 = (M, S^n, Y)$ を S^n 上の異なる曲面とする. S_1 と S_2 が同じ Gauss 写像をもつと仮定すると

$$Y = cX + X_0$$

が成り立つ. ここに, c は 0 でない定数で, $X_0 \in R^{n+1}$ は定ベクトルであり

$$c = -X \cdot X_0 + \epsilon \sqrt{(X \cdot X_0)^2 + 1 - |X_0|^2}, \quad \epsilon = \pm 1$$

を満たす. さらに, 以下のことが成り立つ.

(1) $X \cdot X_0$ と $Y \cdot X_0$ は M 上で一定である.

(2) $X_0 = 0$ ならば $Y = -X$ である.

(3) $X_0 \neq 0$ ならば

$$X(M) \subset S_{r_1}^{n-1} \left(\frac{X \cdot X_0}{|X_0|^2} X_0 \right), \quad Y(M) \subset S_{r_2}^{n-1} \left(\frac{Y \cdot X_0}{|X_0|^2} X_0 \right)$$

で $|c|r_1 = r_2$ を満たす. ここに,

$$r_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{X \cdot X_0}{|X_0|} \right)^2}, \quad r_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{Y \cdot X_0}{|X_0|} \right)^2}$$

である.

補題 11. 補題 10 の仮定の下で, C^∞ 写像 $H_1: M \rightarrow R^{n+1}$ と $H_2: M \rightarrow R^{n+1}$ をそれぞれ S_1 と S_2 の平均曲率ベクトル場とする. このとき, 局所的に

$$H_2 = cH_1 + \frac{(1-c^2)\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2} V + X_0$$

が成り立つ.

(証明) 補題 9, 10 より

$$Y = cX + X_0 = c \left(H_1 - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V \right) + X_0$$

である. また,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = c \frac{\partial X}{\partial z} = c\psi\Phi, \quad c \neq 0$$

より,

$$Y = H_2 - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2} V$$

である. よって

$$H_2 = cH_1 + \frac{(1-c^2)\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2} V + X_0$$

を得る.

補題 11 を用いて以下を得る.

補題 12. 曲面 $S_1 = (M, S^n, X)$ と $S_2 = (M, S^n, Y)$ が同じ Gauss 写像 $G: M \rightarrow Q_{n-1}$ と平均曲率ベクトル場 $H: M \rightarrow R^{n+1}$ をもつと仮定する. このとき, 以下の結果を得る.

(1) $H \neq 0$ のとき, $Y = X$ である.

(2) $H = 0$ のとき, $Y = \pm X$ である.

(証明) 補題 11 で $H = H_1 = H_2$ とおけばよい.

以上の補題を用いて次の定理を得る.

定理 5. ([3]) M をリーマン面とし, C^∞ 写像

$$G: M \rightarrow Q_{n-1} \ (n \geq 3), \quad H: M \rightarrow R^{n+1}$$

を与える. G と H が M 上のすべての点の複素座標近傍上で条件 (12)-(17) を満たすと仮定する. このとき, Gauss 写像が G であり, 平均曲率ベクトル場が H である曲面 $S = (M, S^n, X)$ が存在する.

注意 定理 5 の G は局所的に C^∞ 写像 $\Phi: U \rightarrow C^{n+1} \setminus \{0\}$ を用いて $G = [\bar{\Phi}]$ と表せる. ここに, U は M 上の複素座標近傍とする. V を (2) で与える. 定理 5 で得た曲面を与える C^∞ 共形はめこみ $X: M \rightarrow S^n$ は補題 9 の (18) で与えられる ψ を用いて

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2} V$$

と表せる.

参考文献

- [1] D. A. Hoffman, R. Osserman, The Gauss map of surfaces in R^n , J. Differential Geom. 18 (1983) 733-754.
- [2] A. Tanaka, An Existence Theorem for a Surface in S^n with a given map as its Gauss map, Preprint.

- [3] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map and mean curvature vector, Preprint.
- [4] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map, Preprint.